Aula 19

Equilíbrio

Sumário

- Equilíbrio
- Condições de Equilíbrio
- O Centro de Gravidade
- Exemplos de Equilíbrio Estático

Equilíbrio Estático

Equilíbrio significa que o corpo está em repouso (equilíbrio estático) ou que o seu centro de massa se move com velocidade constante (equilíbrio dinâmico) em relação a um referencial inercial;

Em engenharia estamos sobretudo interessados no equilíbrio estático (não queremos que as pontes caiam!).

Condições de Equilíbrio

A resultante das forças exteriores é nula

$$\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = \vec{0}$$

Se o corpo puder ser considerado como uma partícula,

é esta a única condição de equilíbrio;

O momento resultante das forças exteriores em relação à origem de um referencial de inércia, é nulo:

$$\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \vec{0}$$

Esta condição é necessária para um corpo extenso.

Equações do Equilíbrio

Vamos restringir o estudo a situações em que todas as forças se encontram num plano (*x*O*y*);

Teremos que lidar apenas com três equações:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma t_z = 0$$

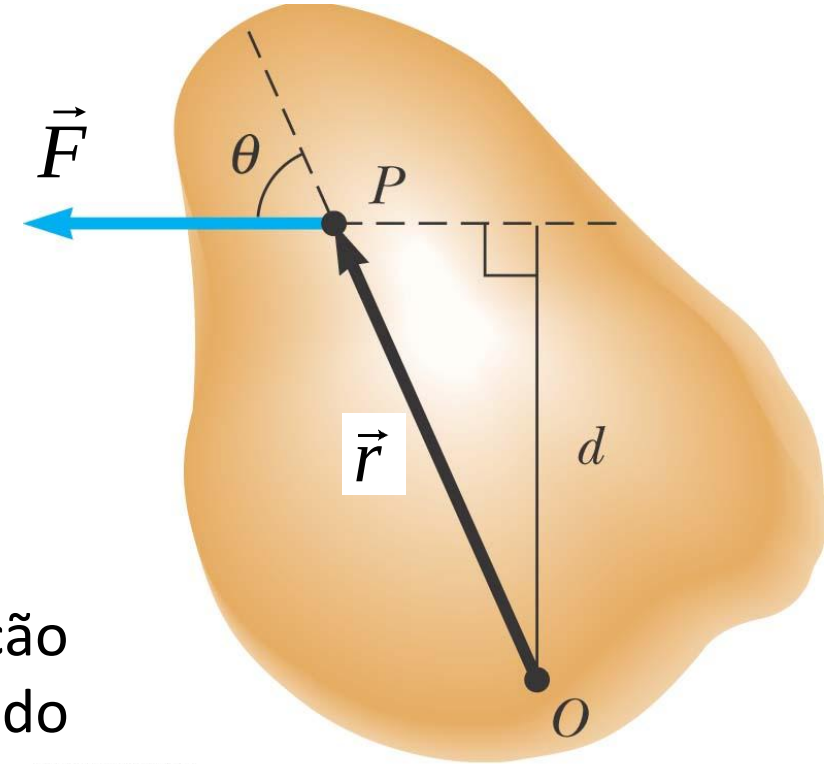
Momento de uma Força

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = rF \sin\theta$$

$$= F\left(r \sin\theta\right)$$

$$= F\ d$$



© 2004 Thomson/Brooks Cole

O momento da força em relação a *O* depende de $\vec{F}$ e do braço do momento *d*.

Eixo de Rotação da Equação do Momento da Força

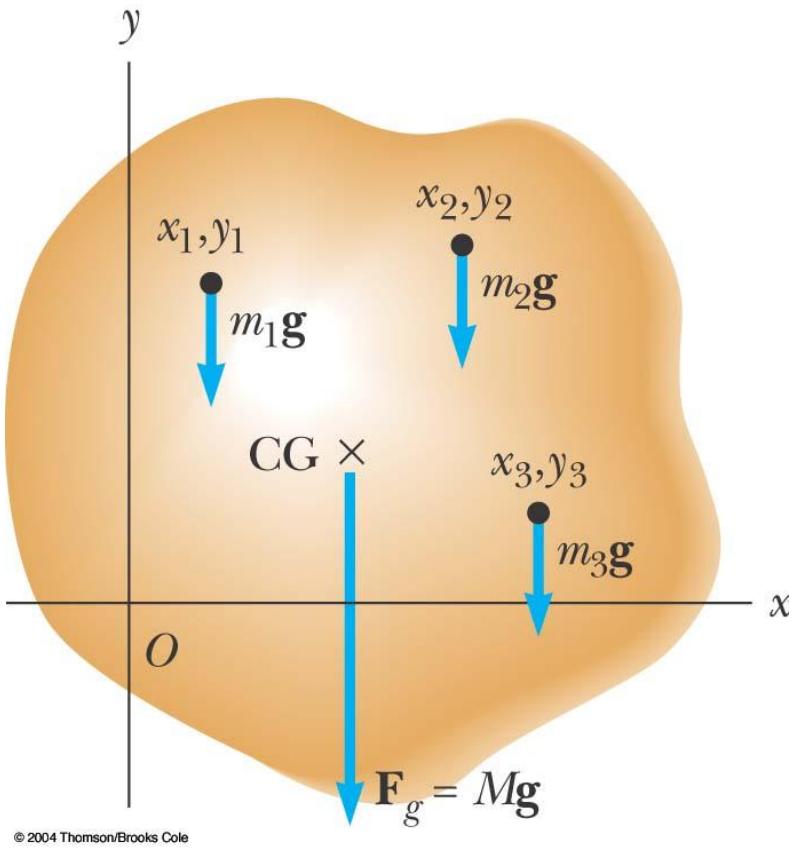
O momento resultante é calculado em relação a qualquer ponto do plano *xOy,* que é a intersecção com um eixo perpendicular a este plano. A escolha do eixo é arbitrária;

Demonstra-se que se um corpo se encontra em equilíbrio de translação, então se o momento resultante em torno de um eixo é nulo, é nulo em relação a qualquer outro eixo.

Centro de Gravidade

O conjunto das forças gravíticas que actuam nas partículas de um corpo é equivalente a uma única força que actua num ponto do corpo denominado:

centro de gravidade (CG).



Centro de Gravidade

A força gravítica que actua num corpo de massa M é a força $M\vec{g}$ que actua no centro de gravidade do corpo;

Se a aceleração $\vec{g}$ é a mesma para todos os pontos do corpo, então o centro de gravidade do corpo coincide com o centro de massa;

Se o objecto é homogéneo (a mesma densidade em todos os pontos) e simétrico, o centro de gravidade coincide com o centro geométrico.

Resolução de Problemas de Equilíbrio

- Desenha-se um diagrama do sistema;
- Isola-se o corpo que se está a estudar;
- Desenha-se um diagrama de forças;
  - Apresentam-se e identificam-se todas as forças exteriores que actuam no corpo;
  - Indicam-se os pontos em que essas forças actuam;
- Se há mais do que um corpo, desenha-se um diagrama de forças para cada corpo.

Resolução de Problemas de Equilíbrio

Escolhe-se um sistema de referência apropriado;

Determina-se as componentes das forças segundo cada um dos eixos;

Aplica-se a primeira condição de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

Resolução de Problemas de Equilíbrio

Escolhe-se um eixo apropriado, em relação ao qual será calculado o momento resultante de todas as forças exteriores que actuam no corpo;

A escolha do eixo é arbitrária;

Devemos escolher aquele que torne os cálculos mais simples;

Para isso, lembramo-nos que uma força cuja linha de acção passa por um ponto produz em momento nulo em relação a esse ponto.

Resolução de Problemas de Equilíbrio

Aplica-se a segunda condição de equilíbrio:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{0}$$

ou

$$\sum \tau_z = 0$$

As duas condições de equilíbrio fornecem um sistema de equações (em geral, 3);

Resolvemos o sistema de equações;

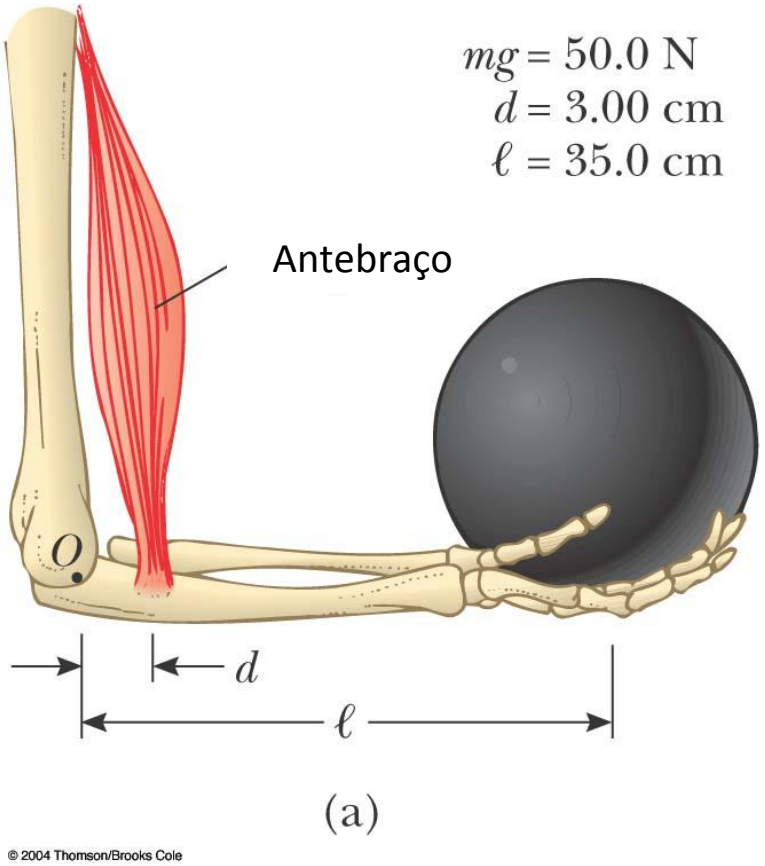
Se a solução nos dá um valor negativo para uma das forças, isso significa que esta tem sentido oposto ao que escolhemos no diagrama de forças que desenhámos.

Exemplo – Massa na Mão

Consideramos o antebraço como um corpo rígido (sem massa);

Não há forças na direcção do eixo dos *x;*

Aplicamos a primeira condição de equilíbrio ($\Sigma F_y = 0$).



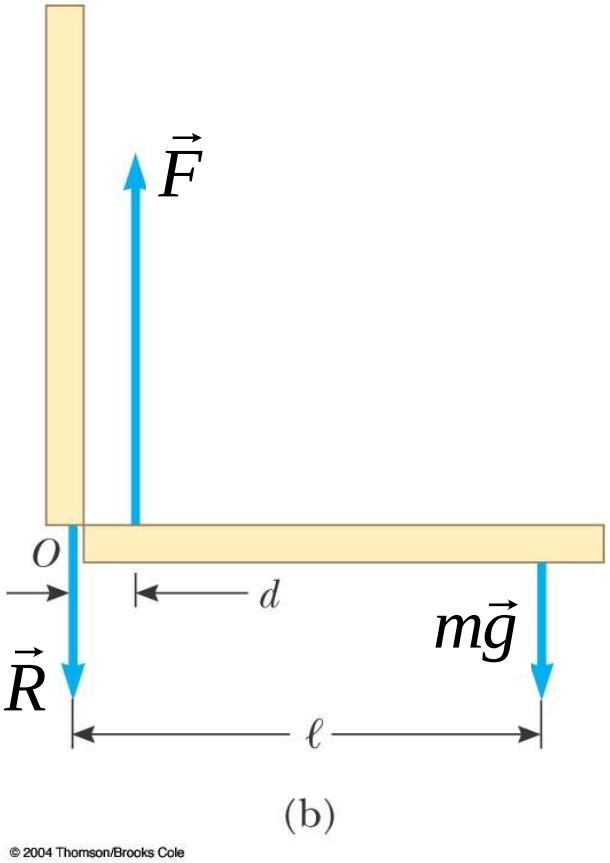
Exemplo – Massa na Mão

Aplica-se a segunda condição de equilíbrio utilizando o cotovelo *O* como eixo de rotação:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{0}$$

Obtém-se as condições de equilíbrio para o diagrama de forças;

Resolve-se o sistema para obter a forças desconhecidas ($\vec{F}$ e $\vec{R}$).



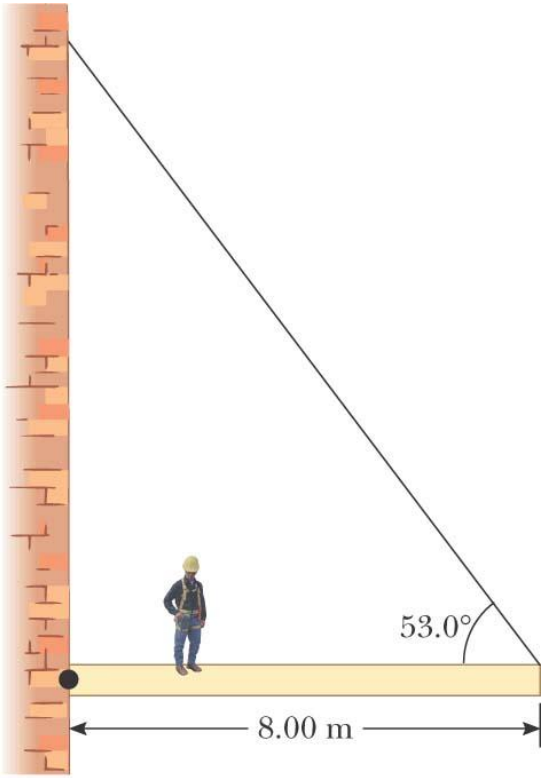
Exemplo – Barra Horizontal

A barra é uniforme;

O centro de gravidade coincide com o centro geométrico;

Uma pessoa está em repouso sobre a barra;

Qual é a tensão do cabo e qual é a força exercida pela parede na barra?



(a)

© 2004 Thomson/Brooks Cole

m_H = 60 Kg, x_H = 2 m
m_{barra} = 20 Kg

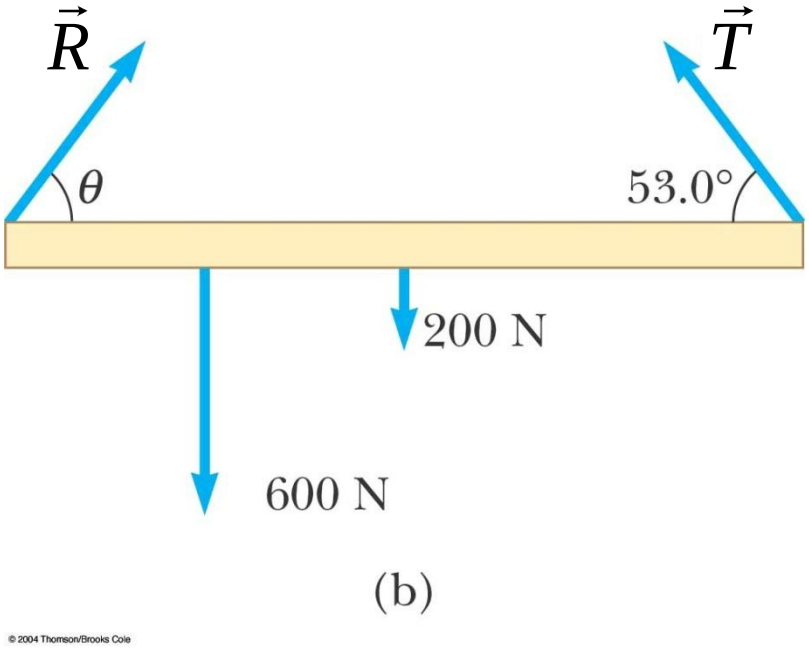
Exemplo – Barra Horizontal

Traça-se um diagrama de forças;

Usa-se como eixo de rotação um eixo na junção da barra com a parede;

Há três incógnitas:

$$\vec{R}, \vec{T}, \theta$$

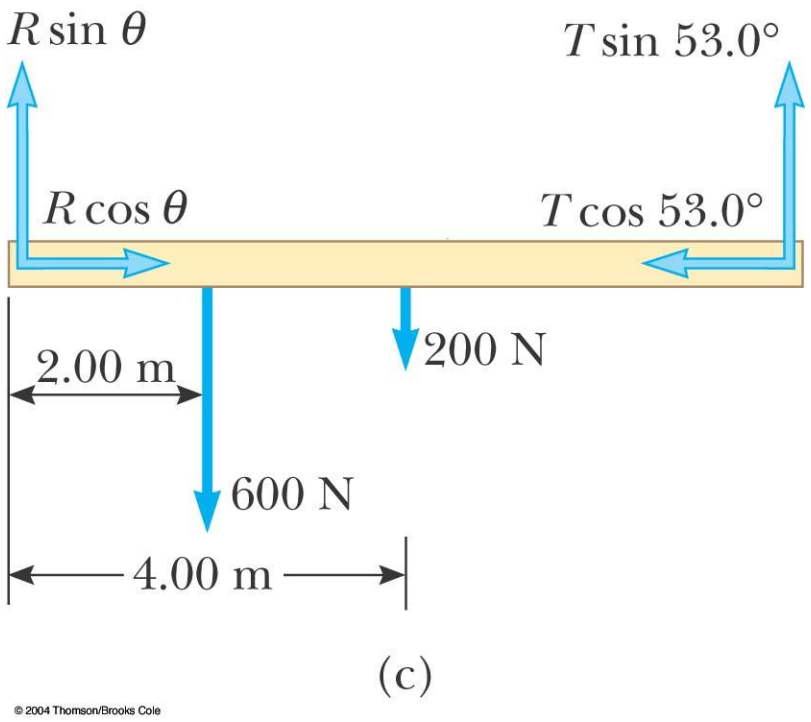


Exemplo – Barra Horizontal

Obtém-se as componentes das forças segundo os eixos coordenados;

Aplicam-se as condições de equilíbrio para obter três equações;

Resolve-se o sistema de equações.

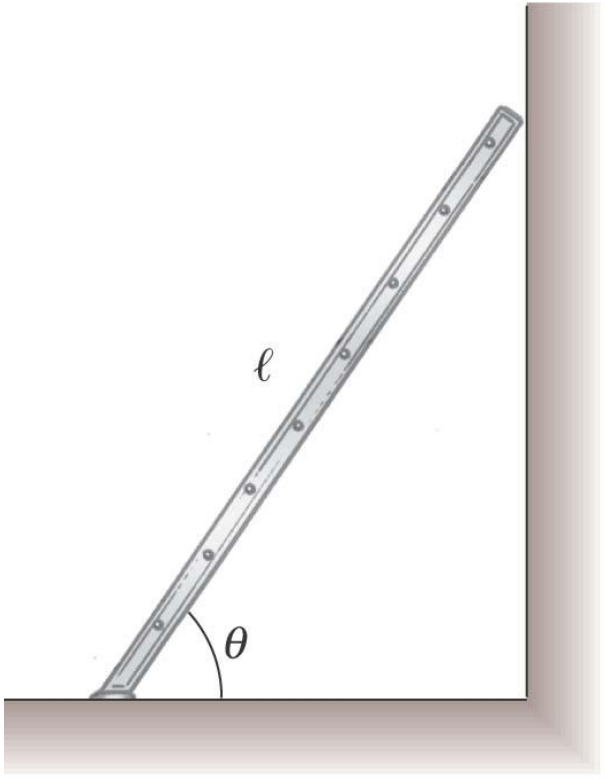


Exemplo – Escada Encostada à Parede

A escada é uniforme;

Portanto o peso da escada actua no centro geométrico (centro de gravidade).

Há atrito estático entre a escada e o solo.



(a)

© 2004 Thomson/Brooks Cole

Exemplo – Escada Encostada à Parede

Desenha-se o diagrama de forças da escada (na figura, desprezando o atrito no contacto com a parede);

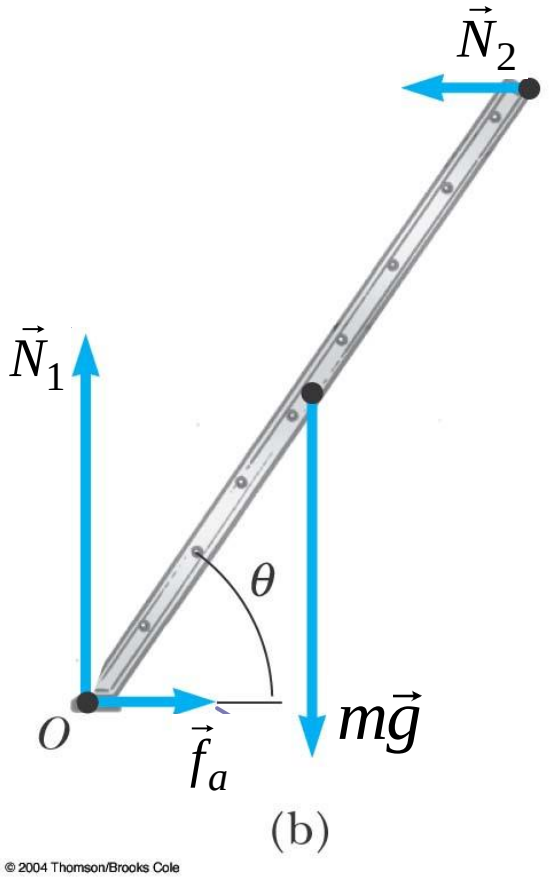
A força de atrito é:

$$f_a \leq \mu_e N_1$$

Escolhe-se o eixo de rotação a passar por *O*;

Obtém-se as equações correspondentes às condições de equilíbrio;

Resolve-se as equações.



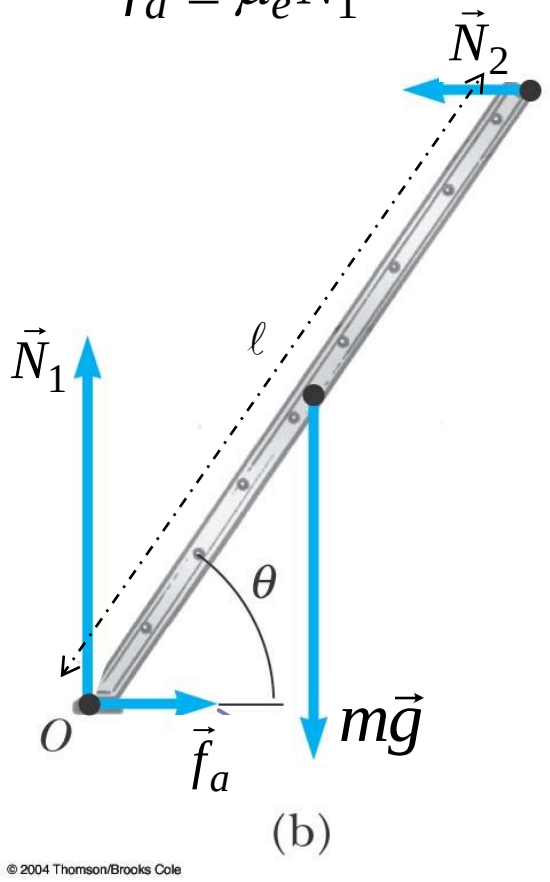
Exemplo – Escada Encostada à Parede

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad f_a = N_2$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = mg$$

$$\sum \tau_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell}{2} mg\cos\theta = \ell N_2 sen\theta$$

$$f_a \le \mu_e N_1$$



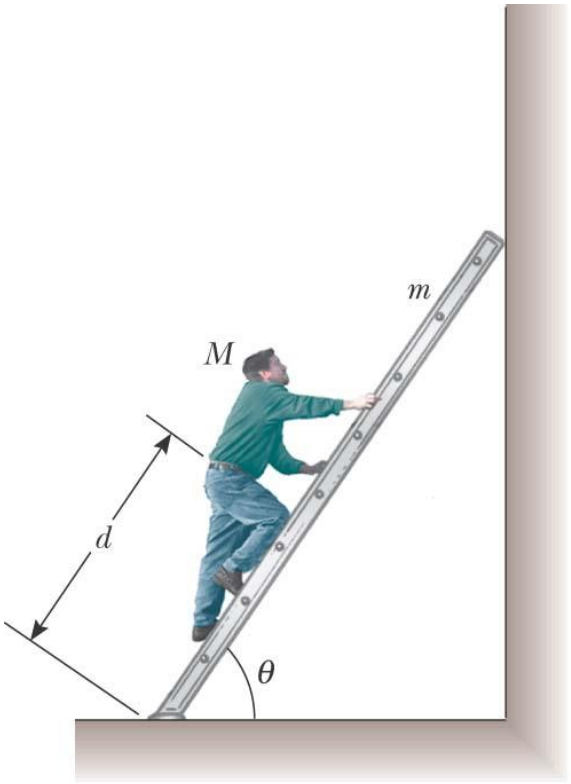
$$\tan\theta = \frac{mg}{2N_2} = \frac{mg}{2f_a}$$

$$\tan\theta \ge \frac{mg}{2\mu_e N_1} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta \ge \frac{1}{2\mu_e}$$

Exemplo – Escada Encostada à Parede com Uma Pessoa a Subir

Acrescenta-se uma pessoa de massa *M* a uma distância *d* da base da escada;

Eventualmente, a escada poderá escorregar.



(c)

© 2004 Thomson/Brooks Cole

Exemplo – Escada Encostada à Parede com Uma Pessoa a Subir

Admite-se que no essencial a pessoa significa uma distribuição não homogénea de massa, dando origem a um centro de gravidade diferente.

Na expressão deduzida anteriormente, $\tan\theta \geq 1/(2\mu_e)$, 2 vinha da distância do centro de gravidade ao ponto O ser $\ell/2$.

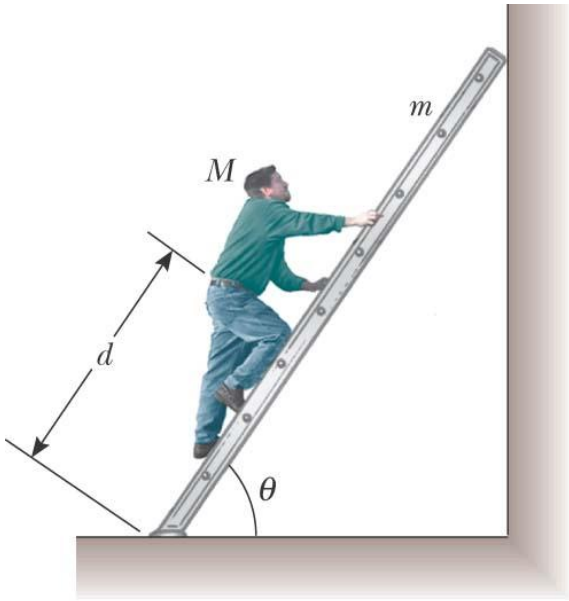
Distância de O ao Centro de Gravidade –

O-CG = $\dfrac{\ell}{x}$

$$\tan\theta' \geq \frac{1}{x\mu_e}$$

$$\tan\theta' < \tan\theta \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$$

$$\tan\theta' > \tan\theta \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$



(c)

© 2004 Thomson/Brooks Cole

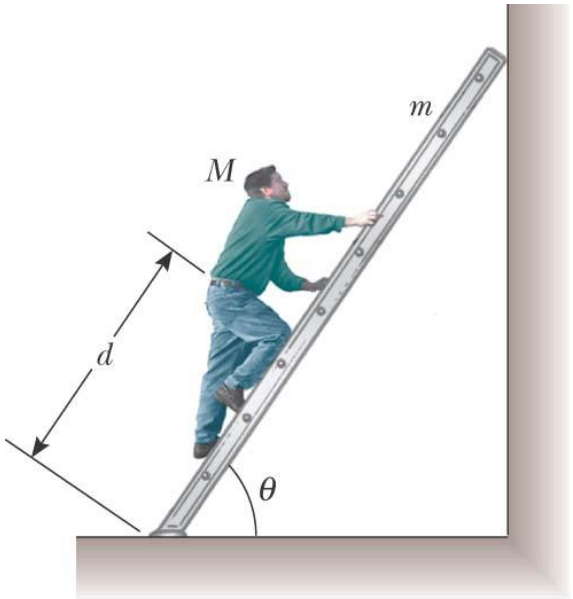
Exemplo – Escada Encostada à Parede com Uma Pessoa a Subir

Na primeira condição, a pessoa está mais perto da base da escada e o centro de gravidade também; a nova expressão para o equilíbrio é necessariamente satisfeita pela anterior.

$$\tan\theta' < \tan\theta \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$$

$$\tan\theta' > \tan\theta \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

Na segunda condição, a pessoa acima do meio da escada, a nova condição de equilíbrio é mais restrita que a anterior, ou seja pode haver valores de θ que satisfaçam a condição de equilíbrio anterior, mas não a nova.



(c)

© 2004 Thomson/Brooks Cole